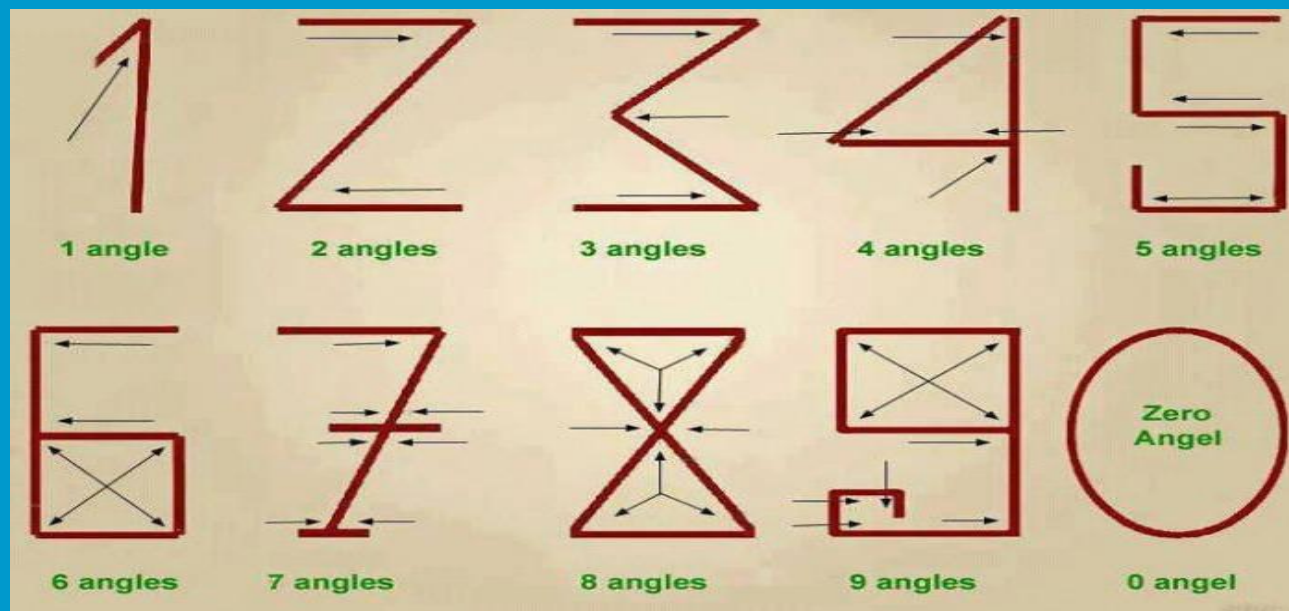


Действия с цели числа.
Действия с дроби. Цели и
рационални изрази. Формули
за съкратено умножение

Катедра Математика
Факултет Природни науки и образование

Арабски цифри

Римските цифри не позволили развитието на позиционна числова система, което довело до постепенното им заместване с арабски цифри. Те са модификация на първоначалната си форма, която е изградена въз основа на броя на ъглите в тях . В Европа те са въведени през XII в. от Фибоначи, във връзка с възникване на банковото дело.



Множества от числа

Понятието за число първоначално е свързано с изброяването на елементи на множества. Естественото число n е символ за брой на елементите на множества с n елемента. С N се означава множеството на естествените числа $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Въпреки яснотата на идеята, строгата дефиниция за естествени числа е въведена през XVIII в. Понятията за числа са били значително разширени с оглед на нуждите на теорията и практиката.

Множество на естествените числа $\mathbb{N}$

“Бог е създал естествените числа, а всичко останало е дело на човека”, Леополд Кронекер

- Възникват като **средство за изброяване** на краен брой различни обекти. Понятието число е абстрактно – независимо от спецификата на самите обекти.
- Множеството е **затворено относно операциите събиране (+) и умножение (.)** т.е. резултатът от действието е от същото множество.
- Свойства на действията събиране и умножение
 - 1) $a+b = b+a$
 - 2) $a.b = b.a$
 - 3) $a+(b+c) = (a+b)+c$
 - 4) $a.(b.c) = (a.b).c$
 - 5) $a.(b+c) = a.b + a.c$

		комутативност
		асоциативност
		дистрибутивност
- ? Проблем: Уравнението $a+x=b$ не винаги има решение в $\mathbb{N}$

Множество на целите числа, $\mathbb{Z}$

- **Разширение на $\mathbb{N}$** като се запазват свойствата 1) – 5)
- Възможна е **нова операция**: изваждане (-), при което уравнението $a+x = b$ има решение в $\mathbb{Z}$.

От историята: Някои математици разглеждат понятието отрицателна величина като резултат от отрицанието на съществуващата

“абсолютна величина” и негодували от това как може да има отрицание на съществуващото.

Щифел (1486 – 1567) определя отрицателните числа като “по-малко от нищото” и ги нарича “нелепи числа”.

На практика: До въвеждането на знака “-” през 15 век, тези числа (като например задължение, преразход, дефицит) се изписвали със същите цифри като положителните, но с друг цвят.

И досега в счетоводните книги преразходът се означава с червено мастило и се казва, че сметката е “на червено”. Днес чрез тях се означават студените зимни температури (под 0), дълбочини под морското равнище и т.н.

Още от древността числата възникват, за да може да се измерва.

Как точно става това? Избира се произволна единица мярка, например метър, килограм, минута и т.н. След това се преброяват толкова единици колкото образуват измерваното количество.

Например 27, 62,... В общия случай няма да може да бъде измерено точно с цели кратни на избраната единица.

Тогава ... ? Въвеждаме нови единици, получени чрез разделяне на първоначалната единица на n равни части. Например: метъра - на 100 сантиметъра, часа - на 60 минути и т.н. Така 5 минути са $5/60$ от часа.

Въвеждат се дробни числа от вида m/n , които се наричат рационални.

Рационални числа, $\mathbb{Q}$

- Основните закони за работа с цели числа остават в сила.
- Въвежда е **нова операция: деление ($:$)** и уравнението $a \cdot x = b$, $a \neq 0$, винаги има решение в $\mathbb{Q}$, за $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Множеството $\mathbb{Q}$ е затворено относно операциите $+$, $..$, $-$, $:$

Знаете ли че,

знаците за:

събиране и изваждане $+$ и $-$ са въведени през 1456 г. от Йохан Регимонтан;

умножение и деление $\times$ и деление $:$, през 1631 г. от Уилям Оутред;

по-голямо и по-малко $>$ и $<$, през 1631 г. от Томас Хариот.

Процент

Процент (от лат. *pro centum* — на сто) е $\frac{1}{100}$ част от едно число.

Бележи се със знака %, който се пише непосредствено до числото

Процентите може да се запишат и като десетична дроб, например 15% от A = 0,15.A.

- Намиране на процент от дадено число

$$p\% \text{ от } A = \frac{p}{100} \text{ от } A = \frac{pA}{100} = B$$

- Намиране на число по даден процент от него

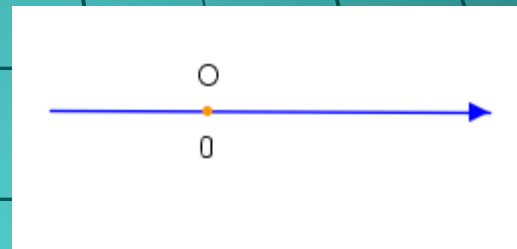
$$p\% \text{ от } A \text{ е } B; \frac{p}{100} \cdot A = B; A = \frac{B \cdot 100}{p}$$

- Изразяване на дадено число A в проценти от друго число B

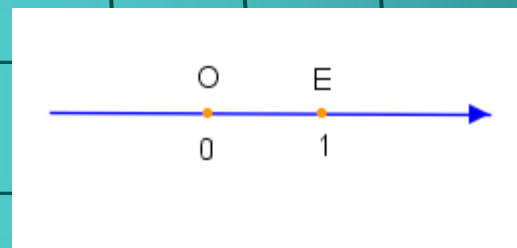
$$\frac{A}{B} \cdot 100\%$$

Изобразяване на рационалните числа върху числовата ос

Нека R е ос, върху която е избрана т. O ,
съответстваща на числото 0



Избираме единична отсечка.
На числото 1 съответства отсечката OE .



На всяко рационално число m , $m > 0$ съответства т. M ,
която е надясно от т. O и $OM = m$.

На всяко рационално число n , $n < 0$ съответства т. N , която
е наляво от т. O и $ON = n$.

Всяко рационално число се изобразява върху числовата ос.

Ирационални числа, I

Определение. Ирационалните числа са числа, които не са рационални.

Ирационалните числа са безкрайни десетични непериодични дроби.

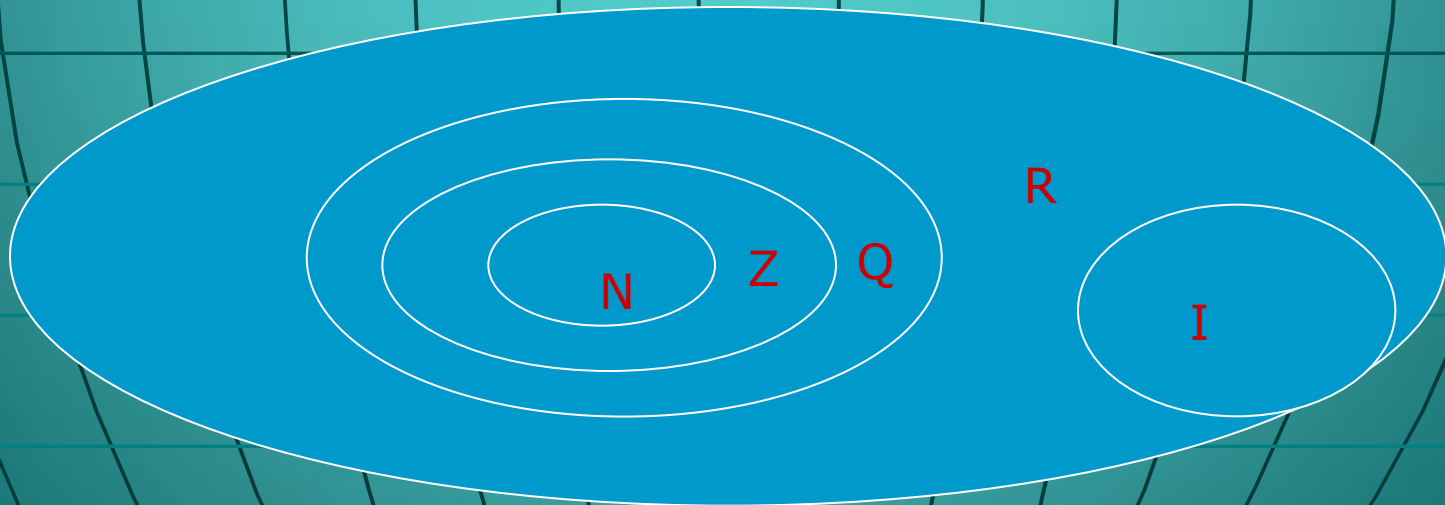
! $1/3=0,33333...$,

$25/99=0,252525...$, са безкрайни десетични периодични дроби,

- $\sqrt{2}=2^{\{1/2\}}=1,4142135623730950488...$ е безкрайна десетична непериодична дроб

РЕАЛНИ ЧИСЛА

Рационалните (Q) и ирационалните числа (I) образуват множеството на реалните числа (R).



Еднозначно обратимо съответствие между реалните числа и точките от числовата ос

Всяко реално число се изобразява с точка от
числовата ос като:

- Образът на по-малкото число е по-наляво
- Образите на две противоположни числа са симетрични
относно началото на числовата ос
- На всяко реално число съответства определена точка
- На всяка точка съответства определено реално число.

Релации и операции в R

Реалните числа са безкрайни десетични дробни.

Те се събират, изваждат, умножават и делят като се заменят с крайни десетични дробни (техни приближения с недостиг или излишък).

В сила са следните свойства:

$$1) a+b=b+a$$

$$2) a.b=b.a$$

$$3) a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$4) a.(b.c)=(a.b).c$$

$$5) a.(b+c)=a.b+a.c$$

$$6) a+0=a$$

$$7) a+(-a)=0$$

$$8) a.1=a$$

$$9) a.0=0$$

$$10) a-b=a+(-b)$$

$$11) -a=(-1).a$$

$$12) a. \frac{1}{a} = 1$$

Действия с цели числа

Събиране (изваждане)	+	-
+	+	Изваждат се и се взема знака на по- голямото по модул
-	Изваждат се и се взема знака на по- голямото по модул	-

Умножение (деление)	+	-
+	+	-
-	-	+

Извършете следните действия с цели числа:

4-7	2-10	3-13	6-16	5-81	7-17	8:(-18)	9-19	8·(-20)
-10·5	-8+5	-9+7	-11+1	-6·3	-19+2	-83+2	-17+5	-27+7
-4-5	-9-5	-2·(-7)	-6:(-9)	-8-4	-6-1	-3:(-9)	-2-8	-3-6
3-6	2·(-8)	3-9	6-1	0-5	9-5	0:(-7)	6-9	8:(-4)
-6:(-3)	-2-7	-4·(-6)	-1-9	-2-8	-5-0	-3-4	-9-1	-4-7

Ред на действията при пресмятане на числови изрази

- Операциите умножение и деление са с по-голям приоритет от операциите събиране и изваждане.
- Скобите в даден израз променят приоритета на операциите в него.

Пример 1 (няма скоби, затова действията се извършват според тяхния приоритет):

$$516 - 7.9 = 453$$

$$115 + 65:5 = 128$$

$$1205.78 - 96:2 = 93942$$

$$2015.2 - 3348:31 = 3922$$

Пример 2 (първо се извършва действието в скобите):

$$(516 - 7).9 = 4581$$

$$(115 + 65):5 = 36$$

$$1205.(78 - 96:2) = 36150$$

$$(2015.2 - 3348):31 = 22$$

Ред на действията при пресмятане на числови изрази

Пример 3 (когато няма скоби и действията са с еднакъв приоритет, тогава се пресмята последователно по реда, в който са изписани):

$$2680 - 500 + 300 = 2480$$

$$1127 - 150 - 120 = 857$$

$$280 : 8.7 = 245$$

$$120.8 : 2 = 480$$

$$2680 - (500 + 300) = 1880$$

$$1127 - (150 - 120) = 1097$$

$$280 : (8.7) = 5$$

$$120.(8:2) = 480$$

Действия с дроби

1. Събиране и изваждане на дроби

а) Събиране и изваждане на дроби с еднакъв знаменател

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Пример:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7-5}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

б) Събиране и изваждане на дроби с различен знаменател
(подвеждане под общ знаменател)

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{2.2}{5.2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{47}{48} - \frac{15}{16} = \frac{47}{48} - \frac{15.3}{16.3} = \frac{47}{48} - \frac{45}{48} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{5}{7} + \frac{2}{9} = \frac{5.9}{7.9} + \frac{2.7}{9.7} = \frac{45}{63} + \frac{14}{63} = \frac{59}{63}$$

Действия с дробями

2. Умножение и деление на дроби

а) Умножение

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Примеры: $\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} = \frac{35}{24}$ $\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 12} = \frac{35}{144}$

б) Деление

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Примеры: $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{8}{4} = 2$ $17 : \frac{7}{8} = \frac{17}{1} : \frac{7}{8} = \frac{17}{1} \cdot \frac{8}{7} = \frac{136}{7}$

$$\frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21}$$

Действия с дроби

в) Сравнение на дроби

- Ако дробите са с еднакъв знаменател, то по-голяма е тази, на която числителят е по-голям:

$$\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$$

$$\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$$

- Ако дробите са с различен знаменател, то трябва да се приведат към еднакъв знаменател и да се използва горното правило:

Пример: Да се сравнят дробите: $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{10}$

$$\frac{2}{3} = \frac{20}{30} \quad \frac{7}{10} = \frac{21}{30}, \text{ следователно } \frac{2}{3} < \frac{7}{10}, \text{ защото } \frac{20}{30} < \frac{21}{30}$$

Цели изрази

- Цели изрази, които са числа, променливи или произведение на числа и променливи, се наричат **едночлени**

Примери: $(3a)^2 5b^3$ $\frac{3}{5} a^2 2b(bc)^3$ $\frac{3}{4} xy^4 z^3$

- Сборът от степенните показатели на променливите, участващи в едночлена, се нарича **степен на едночлена**

Пример: (последния едночлен от горния пример) $1 + 4 + 3 = 8$

- Сбор от едночлени се нарича **многочлен (полином)**

Пример: $x^2 - 2x^2y + 3xy^3 - 5y^3$

- Най-високата от степените на едночлените в многочлена се нарича **степен на многочлена** (степен на дадения многочлен е: $1 + 3 = 4$)

Формули за съкратено умножение

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

Триъгълник на Паскал

- Триъгълникът на Паскал дава възможност за определяне на коефициентите при развитието на израза $(a+b)^n$

$(a+b)^0$				1			
$(a+b)^1$			1	1			
$(a+b)^2$			1	2	1		
$(a+b)^3$			1	3	3	1	
$(a+b)^4$		1	4	6	4	1	
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1	
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6	1

Действия с дробни изрази

$$\frac{x+2}{x} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1) + x(x-3)}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x + 2x + 2 + x^2 - 3x}{x(x+1)} = \frac{2x^2 + 2}{x(x+1)}$$



Помисли и отговори

1. Всяко ирационално число реално ли е?
2. Всяко реално число рационално ли е?
3. Кое от следните твърдения е вярно?
 - А) Всяко рационално число може да се представи с крайна десетична дроб.
 - Б) Всяко реално число има противоположно число
 - В) Множеството на ирационалните числа е подмножество на реалните числа.
4. Кое от числата не е рационално
 - А) 1
 - Б) 0
 - В) $0,(3)$
 - Г) всичките са рационални

Извършете действията с цели числа:

1. $(72 - 36 \cdot (-8) - 24) : (-8)$
2. $-420 : (-14 - 7) \cdot 3 - 7$
3. $(180 - 11 \cdot (-6) - 18) : (-3)$
4. $-250 : (-17 + 7) \cdot 4 - 8$
5. $-8 \cdot (-7 + 23) : 64 + 3$
6. $(5000 + 200) : 20$
7. $820 \cdot (84 : 7)$
8. $76 \cdot 9 : 4$

Отговори:

$(-42, 53, -76, 92, 1, 260, 9840, 171)$

Извършете действията с дроби:

$$1. \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} - \frac{5}{16} \quad \text{Отг.} \quad \frac{29}{16} = 1\frac{13}{16}$$

$$2. \quad 0,75 + \frac{2}{3} \quad \text{Отг.} \quad \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

$$3. \quad 2\frac{1}{2} \cdot 0,3 \quad \text{Отг.} \quad \frac{3}{4}$$

$$4. \quad \frac{13}{11} - \frac{1}{\frac{11}{2}} \quad \text{Отг.} \quad 1$$

$$5. \quad \frac{0,3}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} - 1 \quad \text{Отг.} \quad 0$$