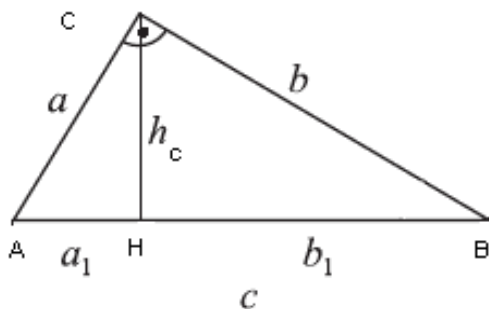


**Метрични зависимости в правоъгълен триъгълник.
Тригонометрични функции – свойства, графики.
Основни тригонометрични тъждества.**

Катедра Математика

Факултет Природни науки и образование

1§. Метрични зависимости в правоъгълен триъгълник



Вече доказахме, че:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACH$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CBH$$

$$\triangle ACH \sim \triangle CBH$$

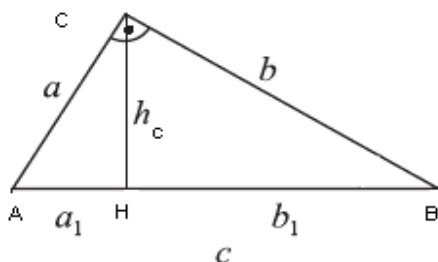
по първи признак за подобност на триъгълници

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{a_1} \Rightarrow a^2 = a_1 c \quad (1)$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BH} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{b_1} \Rightarrow b^2 = b_1 c \quad (2)$$

$$\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{h_c}{b_1} = \frac{a_1}{h_c} \Rightarrow h_c^2 = a_1 b_1 \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 = a_1 c + b_1 c = \underbrace{(a_1 + b_1)}_c c = c \cdot c = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \quad (4)$$



Задача 1: Даден е $\triangle ABC$ с катети a и b , хипотенуза c , проекции на катетите a_1 и b_1 и височина към хипотенузата h_c . По дадени два от елементите намерете останалите четири:

а) $a = 3 \text{ cm}; b = 4 \text{ cm};$

б) $b = 8 \text{ cm}; c = 10 \text{ cm};$

в) $a_1 = 1,8 \text{ cm}; b_1 = 3,2 \text{ cm};$

г) $a = 8 \text{ cm}; a_1 = 6,4 \text{ cm};$

д) $b_1 = 5 \text{ cm}; c = 20 \text{ cm};$

е) $h_c = 6 \text{ cm}; a_1 = 3 \text{ cm};$

Решение:

а)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 4^2 = c^2$$

$$c^2 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$$a^2 = a_1 c \Leftrightarrow a_1 = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ cm}$$

$$b_1 + a_1 = c \Leftrightarrow b_1 = c - a_1 = 5 - 1,8 = 3,2 \text{ cm}$$

$$h_c^2 = a_1 b_1 = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76 \Rightarrow h_c = \sqrt{5,76} = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{100}} = \frac{24}{10} = 2,4 \text{ cm}$$

б)

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$a = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Следващите стъпки са същите, както при решението на подусловие а).

д)

$$a_1 + b_1 = c \Leftrightarrow a_1 = c - b_1 = 20 - 5 = 15 \text{ cm}$$

$$a^2 = a_1 c = 15 \cdot 20 = 300$$

$$a = \sqrt{300} = \sqrt{3 \cdot 100} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 20^2 - 300 = 400 - 300 = 100$$

$$b = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$h_c^2 = a_1 b_1 = 15 \cdot 5 = 75$$

$$h_c = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

е)

$$h_c^2 = a_1 b_1 \Leftrightarrow b_1 = \frac{h_c^2}{a_1} = \frac{6^2}{3} = \frac{36}{3} = 12 \text{ cm}$$

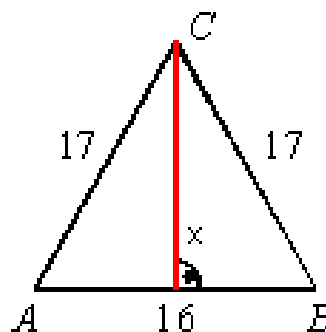
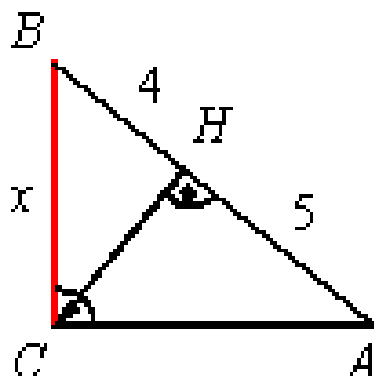
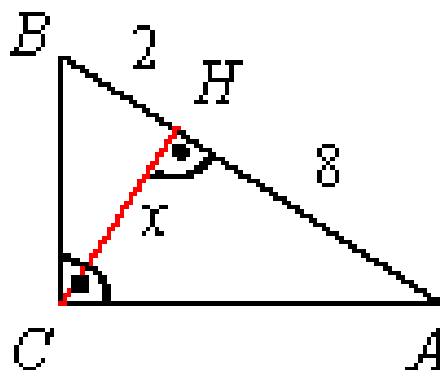
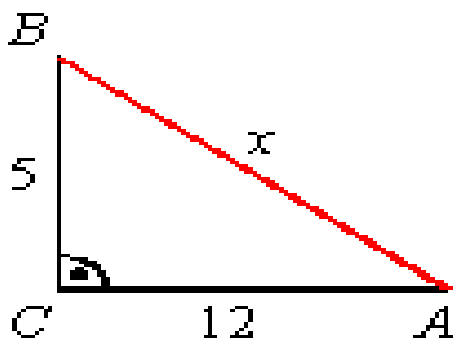
$$c = a_1 + b_1 = 3 + 12 = 15 \text{ cm}$$

$$a^2 = a_1 c = 3 \cdot 15 = 45 \Rightarrow a = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

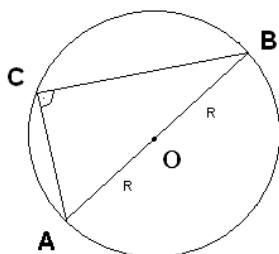
$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 15^2 - 45 = 225 - 45 = 180$$

$$b = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

Задача: Да се намери дължината на отсечката x за всеки от чертежите

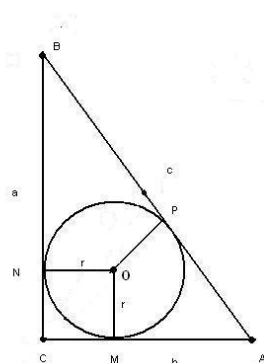


Следват формули за радиусите на вписаната и описаната окръжности.



- **Радиус на описаната окръжност:** Известно е, че центърът на описаната окръжност съвпада със средата на хипотенузата. Следователно,

$$R = \frac{c}{2}$$



- **Радиус на вписаната окръжност:** От свойството на външните допирателни следват равенствата на отсечките:
 $CM = CN = r$; $BN = BP$; $AM = AP$
 От тях следва:
 $a+b = CN+CM+(BN+AM) = CN+CM+(BP+AP)$
 $= r+r+c = 2r+c$

Следователно: $a+b = 2r + c$. Оттук:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Задачи

Задача 1. В правоъгълен триъгълник дължините на катетите са $a = 4 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$. Намерете височините на триъгълника.

Задача 2. В правоъгълен триъгълник катетите са $a = 16 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$. Намерете медианите на триъгълника.

Задача 3. В правоъгълен триъгълник катетите са $a = 14 \text{ cm}$, $b = 48 \text{ cm}$. Намерете радиусите на описаната и вписаната окръжности.

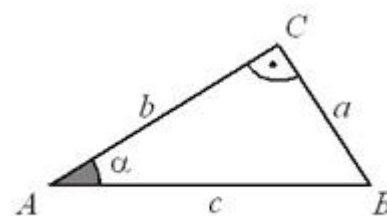
2§. Тригонометрични функции – свойства, графики

2.1. Тригонометрични функции на остър ъгъл

Тригонометричните функции на остър ъгъл α могат да се определят чрез страните на правоъгълен триъгълник с остър ъгъл α . Нека ABC е правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха C и $\angle BAC = \alpha$ (фиг. 1). Тогава:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$



Фиг. 1

В таблицата са дадени стойностите на тригонометричните функции за някои остри ъгли:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

От свойствата на правоъгълния триъгълник и определенията за тригонометрични функции, веднага се получават основните зависимости между тригонометричните функции на остър ъгъл.

За всеки ъгъл α е изпълнено:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

Задачи

Зад. 1. Намерете стойностите на тригонометричните функции на острия ъгъл α на правоъгълен триъгълник с катети a , b и хипотенуза c , ако:

а) $a=3$ cm, $b=4$ cm;

б) $a=5$ cm, $c=13$ cm;

в) $b=15$ cm, $c=17$ cm;

Зад. 2. Намерете две от страните a , b и c на правоъгълен триъгълник, ако:

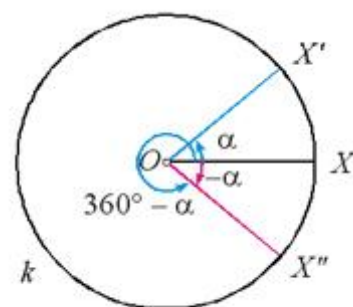
а) $c=20$ cm, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$;

б) $a=2$ cm, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Зад. 3. Бедрото на равнобедрен триъгълник е 17 cm, а косинусът на ъгъла при основата му е $\frac{8}{17}$. Намерете лицето на триъгълника.

2.2. Обобщен ъгъл

Нека k е окръжност с център O . Ако X е точка от окръжността и α е даден ъгъл, върху окръжността има две точки X' и X'' такива, че и $\angle X'OX'' = \alpha$ (фиг. 2). Точката X' се получава, като завъртим X около центъра O на ъгъл α в посока, обратна на часовниковата стрелка, а X'' — чрез завъртане на X в посока на часовниковата стрелка.



Фиг. 2

Въртенето обратно на посоката на часовниковата стрелка се нарича въртене в **положителна посока**, а въртенето по посока на часовниковата стрелка — въртене в **отрицателна посока**. Така завъртане в положителна посока на ъгъл α се означава с $+\alpha$, а в отрицателна посока — с $-\alpha$.

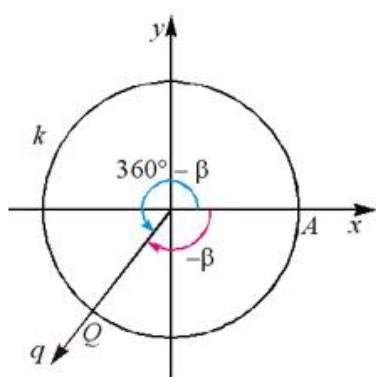
Ясно е, че при зададени точка O и ъгъл α (положителен или отрицателен в зависимост от посоката на въртене) на всяка точка X съответства единствена точка X' от окръжността $k(O, OX)$, за която $\angle XOX' = \alpha$. Полученото съответствие, при което на всяка точка X , различна от O , се съпоставя точка X' такава, че $OX = OX'$ и $\angle XOX' = \alpha$, а на точката O съответства самата точка O , се нарича **ротация с център O на ъгъл α** .

Окръжност k с център началото O на правоъгълна координатна система и радиус 1 се нарича единична тригонометрична окръжност.

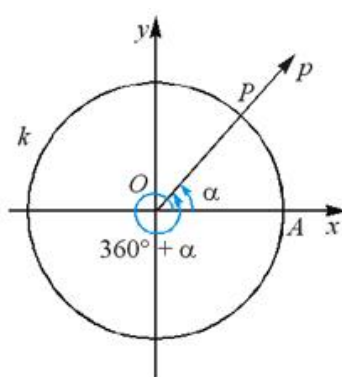
Ако $\angle(Ox^{\rightarrow}; Op^{\rightarrow})$ е насочен ъгъл и $Op^{\rightarrow} \cap k = P$, то на насочения ъгъл $\angle(Ox^{\rightarrow}; Op^{\rightarrow})$ съответства точката P от k . Така на всеки насочен ъгъл с първо рамо $Op^{\rightarrow}$ можем да съпоставим единствена точка от тригонометричната окръжност. На *фиг. 5* на $\angle Ox^{\rightarrow}P = \alpha$ съответства точка P , а на $\angle Ox^{\rightarrow}Q = -\beta$ съответства точка Q . Ако $Ox^{\rightarrow} \cap k = A$, то точките P и Q са образите на A при ротации с център O и ъгли съответно α и $-\beta$.

Ясно е, че точката Q може да се получи и като завъртим точката A в положителна посока на ъгъл $360^\circ - \beta$ (*фиг. 6*).

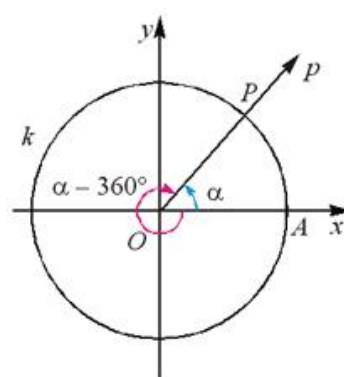
Тъй като при ротация на 360° точката A съвпада със себе си, то точката P можем да получим и като завъртим A в положителна посока на ъгъл $\alpha + 360^\circ$ (*фиг. 7a*) или в отрицателна посока на ъгъл $\alpha - 360^\circ$ (*фиг. 7б*).



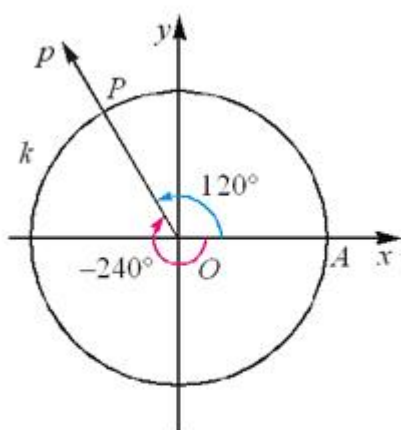
Фиг. 6



Фиг. 7a



Фиг. 7б



Фиг. 8

Тъй като има безбройно много ротации с център O , които изобразяват A в P , то точката P е образ на A при ротации на ъгъл: α , $\alpha \pm 360^\circ$, $\alpha \pm 2 \cdot 360^\circ$, $\alpha \pm 3 \cdot 360^\circ$, ..., т.е. при ротации на ъгъл $\alpha \pm m \cdot 360^\circ$, където m е произволно цяло число.

Ъглите, съответстващи на тези ротации, се наричат **обобщени ъгли**.

2.3. Радиан

Централен ъгъл има мярка 1 радиан (1 rad), ако дължината на съответната му дъга е равна на радиуса на окръжността.

Тъй като дължината на полуокръжност с радиус r е πr , то радианната мярка на

изправен ъгъл е π , т.е. $180^\circ = \pi \text{ rad}$. Следователно $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ и $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$. Оттук получаваме връзката между градусната и радианната мярка на един ъгъл:

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha}{180} \pi$$

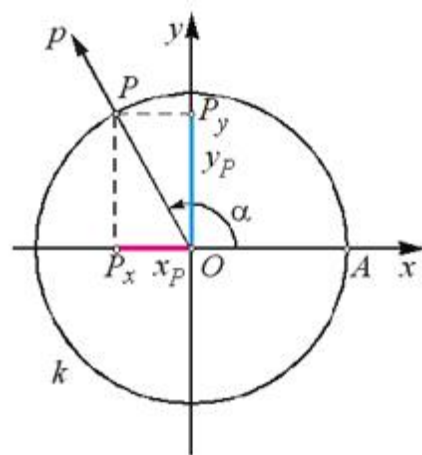
$$x \text{ rad} = \frac{x}{\pi} 180^\circ$$

В таблицата са дадени радианните мерки на някои по-често срещани ъгли:

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$x \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

2.4. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл

Нека на обобщения ъгъл с мярка α съответства точката P от тригонометричната окръжност. Тъй като P е образ на A при ротация на ъгъл α , то лъчът $\vec{Ox} = \vec{OA}$ се нарича първо рамо на ъгъла, а лъчът $\vec{OP}$ — второ рамо. Нека координатите на точката P спрямо координатната система Oxy са x_p и y_p (фиг. 10).

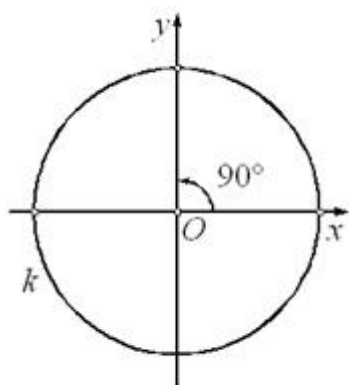


Фиг. 10

Функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл с мярка α числото y_p , се нарича синус и се бележи $\sin \alpha$.

Функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл с мярка α числото x_p , се нарича косинус и се бележи $\cos \alpha$.

Пример 1. Да се намерят стойностите на функциите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ за ъгли 0° , 90° , 180° и 270° .



Фиг. 11

За ъгъл 0° лъчът $OP \rightarrow$ съвпада с оста Ox (фиг. 11). Тогава $x_P = 1$ и $y_P = 0 \Rightarrow \sin 0^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1$.

За ъгъл 90° лъчът $OP \rightarrow$ съвпада с оста Oy (фиг. 11). Тогава $x_P = 0$ и $y_P = 1 \Rightarrow \sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0$.

За ъгъл 180° лъчът $OP \rightarrow$ съвпада с противоположния лъч на оста Ox (фиг. 11).

Тогава $x_P = -1$ и $y_P = 0 \Rightarrow \sin 180^\circ = 0, \cos 180^\circ = -1$.

За ъгъл 270° лъчът $OP \rightarrow$ съвпада с противоположния лъч на оста Oy (фиг. 11).

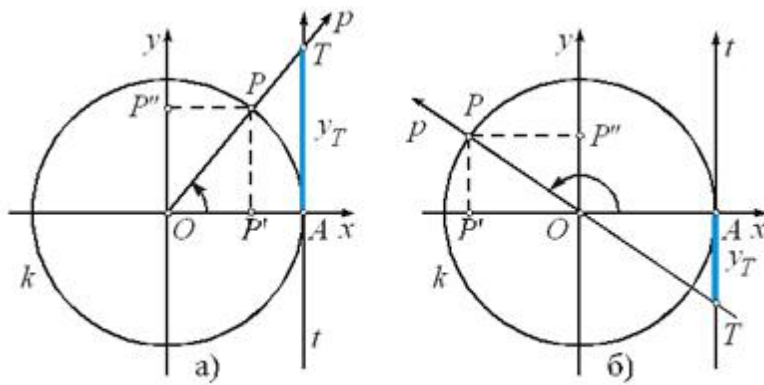
Тогава $x_P = 0$ и $y_P = -1 \Rightarrow \sin 270^\circ = -1, \cos 270^\circ = 0$.

Функциите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ са периодични с период 360° .

Функциите тангенс и котангенс също могат да се определят с помощта на тригонометричната окръжност.

Нека $A = Ox \rightarrow \cap k$ и t е допирателната към тригонометричната окръжност в точка A . Да означим с T пресечната точка на правата, съдържаща второто рамо $OP \rightarrow$ на ъгъл α , с

правата t (фиг. 15). Тъй като $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\sin \alpha = y_P$ и $\cos \alpha = x_P$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$.



Фиг. 15

Ако $\alpha < 90^\circ$ (фиг. 15а),

$y_P = OP'' = P'P$ и $x_P = OP'$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{P'P}{OP'}$. Но $\triangle OP'P \sim \triangle OAT$, откъдето $\frac{P'P}{OP'} = \frac{AT}{OA} = AT$ ($OA=1$). Следователно $\operatorname{tg} \alpha = AT$.

Ако $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (фиг. 15б), $y_P = OP'' = P'P$ и $x_P = -OP'$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{P'P}{OP'}$. Но $\triangle OP'P \sim \triangle OAT$, откъдето $\frac{P'P}{OP'} = \frac{AT}{OA} = AT$ ($OA=1$). Следователно при тъй ъгъл $\operatorname{tg} \alpha = -AT$.

Нека y_T е ординатата на точка T . Ясно е, че когато α е остър ъгъл, $y_T > 0$ и $y_T = AT$, а когато α е тъп ъгъл, $y_T < 0$ и $y_T = -AT$.

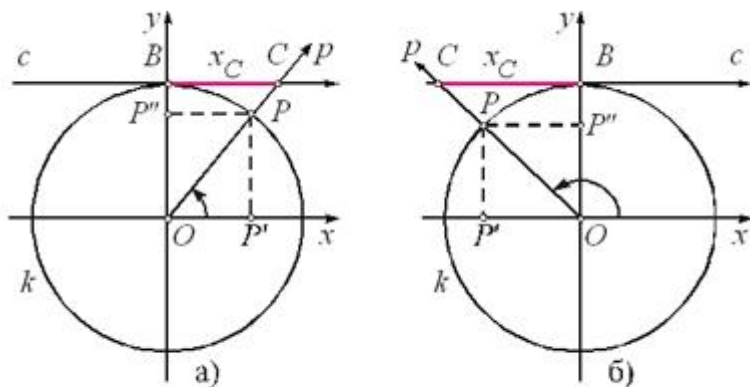
Изобщо за произволен обобщен ъгъл α ($\alpha \neq (2k+1)90^\circ$) тангенсът на ъгъл α е равен на ординатата y_T на пресечната точка на правата, определена от второто рамо на ъгъл α и оста $A\vec{t}$. Оста $A\vec{t}$ се нарича **тангенсова ос**.

Функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл с мярка α числото y_T , се нарича тангенс и се бележи $\operatorname{tg} \alpha$.

По подобен начин се определя и $\operatorname{cotg} \alpha$.

Нека $B = Oy^{\rightarrow} \cap k$ и s е допирателната към тригонометричната окръжност в точка B . Да означим с C пресечната точка на правата, съдържаща второто рамо $Op^{\rightarrow}$ на ъгъл α с правата s (фиг. 16). Тъй като $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ и $\sin \alpha = y_P$, $\cos \alpha = x_P$, то $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x_P}{y_P}$.

Ако $\alpha < 90^\circ$ (фиг. 16а), $y_P = OP''$ и $x_P = OP' = P''P$, т.е. $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{P''P}{OP''}$. Но $\triangle OP''P \sim \triangle OBC$, откъдето $\frac{P''P}{OP''} = \frac{BC}{OB} = BC$ ($OB=1$). Следователно $\operatorname{cotg} \alpha = BC$.



Фиг. 16

Ако $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (фиг. 16б),

$y_P = OP''$ и $x_P = -OP' = -P''P$, т.е. $\cotg \alpha = -\frac{P''P}{OP''}$. Но $\triangle OP''P \sim \triangle OBC$, откъдето $\frac{P''P}{OP''} = \frac{BC}{OB} = BC$ ($OB = 1$). Следователно при тъй ъгъл α $\cotg \alpha = -BC$.

Нека x_C е абсцисата на точка C. Ясно е, че когато α е остър ъгъл, $x_C > 0$ и $x_C = BC$, а когато α е тъп ъгъл, $x_C < 0$ и $x_C = -BC$.

Изобщо за произволен обобщен ъгъл α ($\alpha \neq k \cdot 180^\circ$) котангенсът на ъгъл α е равен на абсцисата x_C на пресечната точка на правата, определена от второто рамо на ъгъл α и оста $Bc \rightarrow$. Оста $Bc \rightarrow$ се нарича **котангенсова ос**.

Функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл с мярка α числото x_C , се нарича котангенс и се бележи $\cotg \alpha$.

Функциите $\tg \alpha$ и $\cotg \alpha$ са периодични с период 180° .

Свойства на тригонометричните функции

Основно тригонометрично тъждество

За произволен обобщен ъгъл α е в сила $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Тъй като $\sin^2 \alpha \geq 0$ и $\cos^2 \alpha \geq 0$, то от равенството $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ следва, че $\sin^2 \alpha \leq 1$ и $\cos^2 \alpha \leq 1$, откъдето $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ и $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

Четна и нечетна функция

Функцията $f(x)$, дефинирана в множеството D, се нарича четна, ако за всяко $x \in D$, $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$.

Функцията $f(x)$, дефинирана в множеството D , се нарича нечетна, ако за всяко $x \in D$, $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

Четност и нечетност на тригонометричните функции

Функцията косинус е четна, а функциите синус, тангенс и котангенс са нечетни, т.е.

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha.$$

Задача. Да се изразят стойностите на тригонометричните функции за ъгли $90^\circ \pm \alpha$ и $180^\circ \pm \alpha$ чрез стойностите на тригонометричните функции на ъгъл α .

Резултатите могат да се обобщят в таблицата:

	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$

Като се вземе предвид, че всички тригонометрични функции в I квадрант са положителни, и определянето им чрез абсцисите и ординатите на точки от единичната окръжност, се получава следната таблица за знаците на тригонометричните функции в различните квадранти:

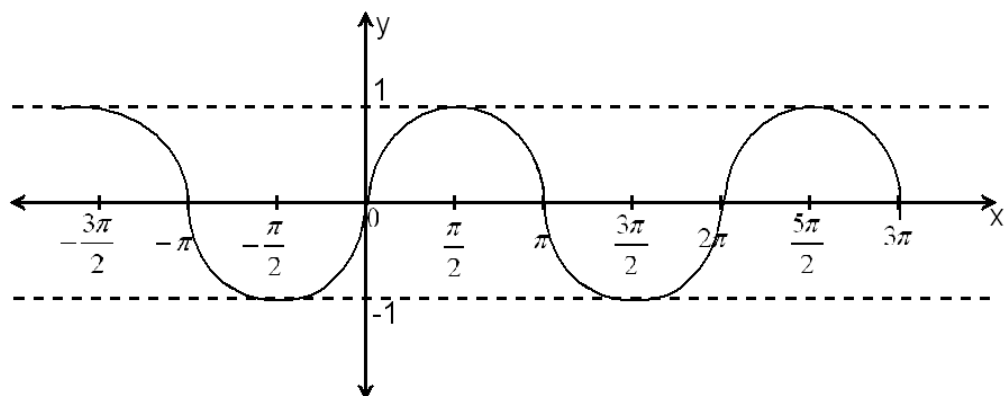
α	I квадрант $0^\circ - 90^\circ$	II квадрант $90^\circ - 180^\circ$	III квадрант $180^\circ - 270^\circ$	IV квадрант $270^\circ - 360^\circ$
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cotg α	+	-	+	-

В следващата таблица са дадени стойностите на тригонометричните функции на някои често използвани ъгли.

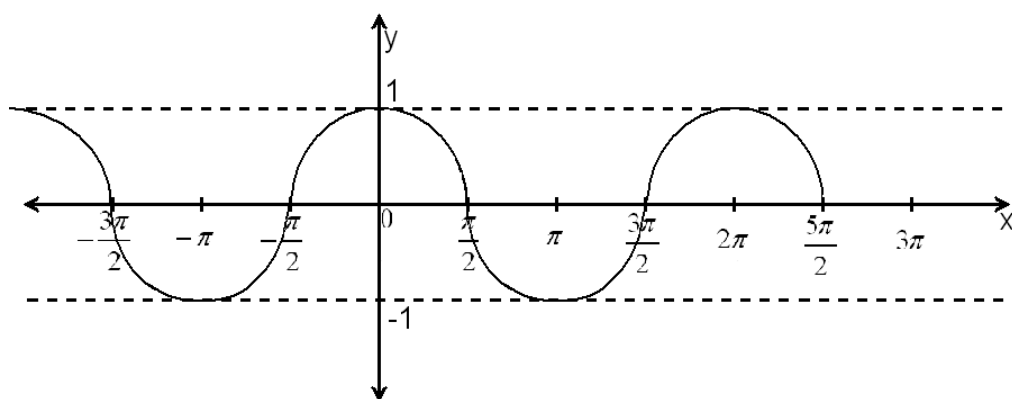
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Графики на тригонометричните функции

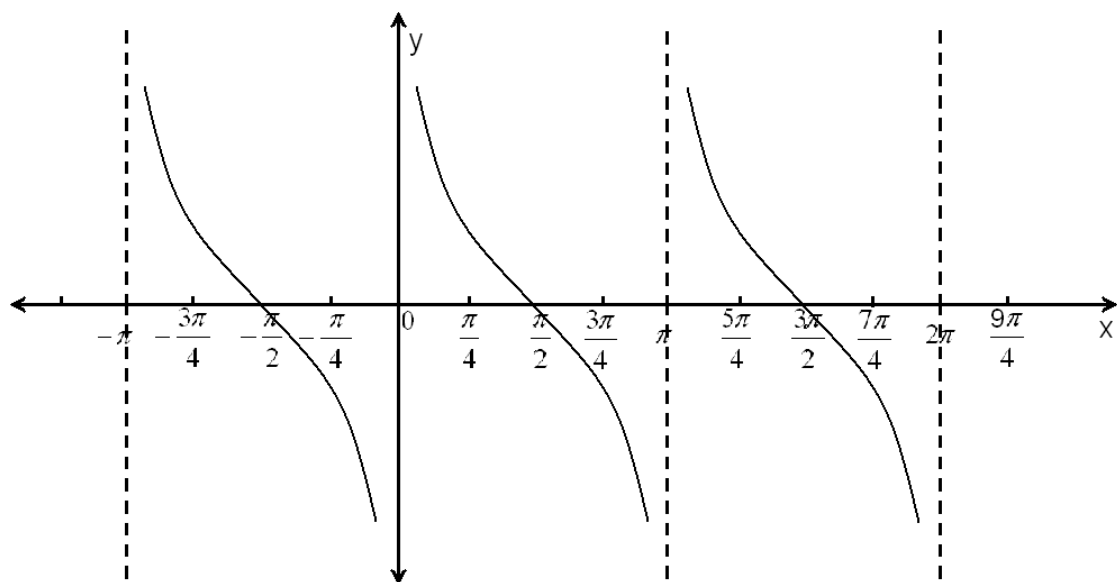
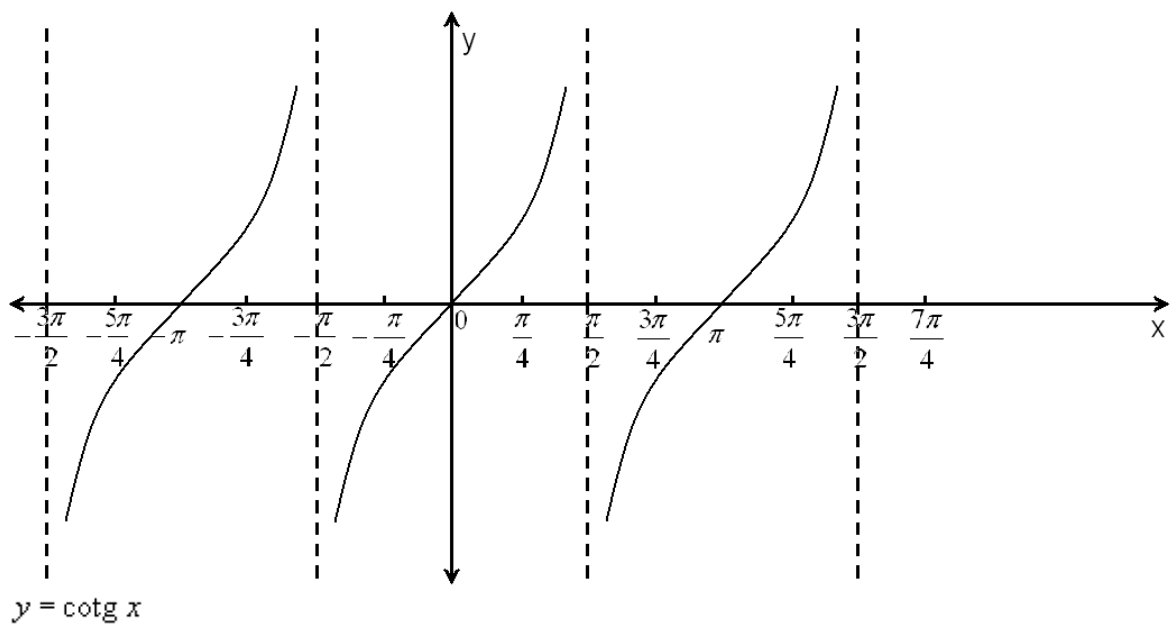
$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$



3§. Основни тригонометрични тъждества

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$3. -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$4. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1. \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$$

$$2. \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$$

$$5. \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3. \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

$$4. (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$
$\sin$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$x \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Формули за сбор и произведение на тригонометрични функции

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

Събирателни формули

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$$

• формули за удвоен ъгъл:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

• формули за половинки ъгли:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

• други основни формули:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Задачи:

Зад. 1. Да се опрости изразът:

а) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;

б) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{cotg}^2 \alpha$;

в) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}$.

Зад. 2. Да се пресметне стойността на израза:

а) $\frac{2 \cdot \cos \alpha + 3 \cdot \operatorname{cotg} \alpha}{4 \cdot \cos \alpha}$, ако $\sin \alpha = 0,6$;

б) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha}{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$, ако $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Зад. 3. Без помощта на таблици да се пресметне:

а) $\sin 6^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 6^\circ \cdot \sin 9^\circ$;

б) $\frac{\cos 27^\circ \cdot \cos 37^\circ + \sin 37^\circ \cdot \cos 63^\circ}{\cos 63^\circ \cdot \cos 107^\circ - \cos 27^\circ \cdot \sin 107^\circ}$.

Зад. 4. Да се опрости изразът:

а) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$;

б) $\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos 2\alpha$.

Зад. 5. Без помощта на таблици да се изчисли:

а) $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$.

Зад. 6. Да се пресметне:

а) $\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$, ако $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$;

б) $\sin 3\alpha \cdot \cos \alpha$, ако $\operatorname{tg} 2\alpha = 2$ и $\alpha \in (0^\circ; 45^\circ)$;

в) $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, ако $\cos \alpha = 0,8$ и $\cos \beta = 0,6$.